线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性空间

主讲: 杨金榜

地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

寻找极大无关组的理论工具

原理: 初等行变换不改变列向量的线性相关性.

定理

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组列向量. 对矩阵

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m) \in \mathbb{F}^{n\times m}$$

做一系列行初等变换得到

$$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_m) \in \mathbb{F}^{n\times m}.$$

则对于任意 $i_1, i_2, \cdots, i_r \in \{1, 2, \cdots, m\}$,

1. $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性相关 (无关) $\Leftrightarrow \vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \cdots, \vec{b}_{i_r}$ 线性相关 (无关);
2. $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 极大无关 $\Leftrightarrow \vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \cdots, \vec{b}_{i_r}$ 极大无关;

等价向量组

定义 (等价)

称两向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 和 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_\ell$ 等价, 若

1. 任意 $i \in \{1, \cdots, m\}$, $\vec{a}_i$ 可由 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_\ell$ 线性表示;
2. 任意 $i \in \{1, \cdots, \ell\}$, $\vec{b}_i$ 可由 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性表示;

此时记为 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m\} \sim \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_\ell\}$.

定理 (通过生成子空间来判定是否等价)

$$\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} \sim \{\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_\ell\} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_\ell \rangle.$$

注: $\sim$ 为等价关系.

推论

1. 一个向量组与它的任一极大无关组等价;
2. 任两极大无关组等价.

极大无关组的基本性质

定理

设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r$ 和 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_s$ 为两线性无关的向量组. 若它们相互等价, 则 $r=s$.

推论

向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 的任两个极大无关组中的向量个数相同. 这个数称为向量组的秩. 记为$\mathrm{rank}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$ 或者$r(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$.

性质 (用秩判定相关性)

1. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)=m;$
2. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)<m;$

秩与线性相关性

定理

若 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_s$ 可由 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 线性表示, 则

$$\operatorname{rank}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_s) \leq \operatorname{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r).$$

推论

1. $\mathbb{F}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量一定线性相关.
2. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r\} \sim \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_s\} \Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_s) = \operatorname{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r)$;

推论 (用秩来判定线性方程组是否有解)

$\vec{b}$ 为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 的线性组合 $\Leftrightarrow$
$\operatorname{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r) = \operatorname{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r, \vec{b})$.

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n\end{pmatrix}$$

我们有如下三种秩:

1. $\operatorname{rank}(A)$　　矩阵 A 的秩;
2. $\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$　　矩阵 A 的行秩;
3. $\operatorname{rank}(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_n)$　　矩阵 A 的列秩;

定理

秩 = 行秩 = 列秩.

推论

设 A 为 n 阶方阵. 则

1. A 可逆 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=n \Leftrightarrow$ 行 (列) 向量线性无关.
2. $\operatorname{rank}(A)=r \Rightarrow$ 不为零的 r 阶子式所在的行 (列) 构成的 A 的行 (列) 向量的极大无关组.

定理

向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的任意子空间都可以由有限个向量生成.

证明思路: 反证. 假若子空间 V 不能由有限个向量生成. 则存在一列向量

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

使得 $a_i \in V \setminus \langle a_1, \cdots, a_{i-1} \rangle$. 特别地, (由习题 15 知)

$$a_1, \cdots, a_{n+1}$$

线性无关. 矛盾!

推论

对于任意 $\mathbb{F}^n$ 的子空间 V, 存在一组线性无关的向量 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 使得

$$V = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \rangle.$$

子空间的基与维数

定义 (基)

设 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间. 若向量组 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$

- 线性无关, 且
- 生成子空间 V,

则称 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 为 V 的一组基. 称基中向量的个数 r 为子空间 V 的维数.

性质 (坐标)

设向量组 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 为 V 的一组基. 则任意 $\vec{a} \in V$ 可唯一地表示为 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 的线性组合. 即, 存在唯一的一组数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ 使得

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{a}_i =: (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}.$$

称 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ 为 $\vec{a}$ 在基 $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r\}$ 下的坐标.

例 (自然基)

设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基. 任意向量在自然基下的向量为自身, 即

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{空间} \xrightarrow[1:1]{\text{坐标系}} \mathbb{R}^3 \\ \quad \text{点} \longmapsto \text{点在坐标系下的坐标} \end{array}}$$

推广

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{F}^n \text{ 的 } r \text{ 维子空间} \xrightarrow[1:1]{\text{基}} \mathbb{F}^r \\ \qquad\qquad \text{向量} \longmapsto \text{向量在基下的坐标} \end{array}}$$

设 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 和 $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r$ 为 V 的两组基. 设向量 $v \in V$ 在两组基下的坐标分别为 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ 和 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$. 即,

$$v = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r)X = (\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r)Y.$$

问题: 如何确定 X 和 Y 之间的关系?

性质

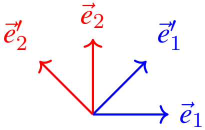
设 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 和 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r$ 为 V 的两组基. 则

1. 存在唯一 r 阶方阵 T 使得
$$(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r)=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)T.$$
矩阵 T 称为从基 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 到基 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r$ 的过渡矩阵.
2. 设向量 $v\in V$ 在两组基下的坐标分别为 $X=\begin{pmatrix}x_1, & \cdots, & x_r\end{pmatrix}^T$ 和 $Y=\begin{pmatrix}y_1, & \cdots, & y_r\end{pmatrix}^T$. 则
$$X=TY. \qquad \text{(坐标变换公式)}$$

注: 过渡矩阵 T 总是可逆的.

例

逆时针旋转平面直角坐标系 θ 角.



$$\Rightarrow (e_1', e_2') = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

定理 (扩充基)

设 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的 r 维子空间. 设 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s$ 为 V 中一组线性无关向量. 则 $s \leq r$ 且存在 $\vec{a}_{s+1}, \cdots, \vec{a}_r \in V$ 使得 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 构成 V 的一组基. 称 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 为 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s$ 的一组扩充基.

性质

设 U 和 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的两个子空间.

1. 若 $\dim(V) = r$, 则 V 中的任意 $r+1$ 个向量线性相关;
2. 若 $\dim(V) = r$ 且 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \in V$ 线性无关, 则 $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r\}$ 为 V 的一组基.
3. 若 $U \subseteq V$, 则 $\dim U \leq \dim V$.
4. 若 $U \subseteq V$ 且 $\dim U = \dim V$, 则 $U = V$.

例

证明 $V=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间. 求 V 的维数并找出其一组基.

通解: $X=t_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

例

证明 $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0, 2x_1-x_2+x_3=3\}$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{F}^m$ 为非零向量. 则

1. $V:=\{X\in\mathbb{F}^n \mid AX=0\}$ 为子空间;
2. $W:=\{X\in\mathbb{F}^n \mid AX=b\}$ 不是子空间.

接下来学习 V 和 W 更进一步地性质.

有 (唯一) 解的判定

定理

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{F}^m$. 则

1. $AX = b$ 有解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b)$.
2. $AX = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b) = n$.

例

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 则

1. $AX = 0$ 一定有解;
2. $AX = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < n \xLeftrightarrow{\text{若 } A \text{ 为方阵}} \det(A) = 0$.

定义 (基础解系)

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 称解空间

$$V = \{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = 0\}$$

的一组基为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系.

定理 (解空间大小)

$$\dim(V) = n - \operatorname{rank}(A).$$